EXERCICE N°1 : 4 points 25 '

Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) : $z^2 - z + 3 + \sqrt{3}i = 0$.

1°) a) Vérifier que $\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ est une solution de (E).

b) Déduire l'autre solution de (E).

2°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On donne les points A et M_θ d'affixes respectives $\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ et $\sqrt{3}\,e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$.

a) Vérifier que $e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left[e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right] = e^{i\theta} - \mathrm{i}$.

b) En déduire que $AM_\theta = 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

c) Déterminer θ pour que le triangle OAM_θ soit isocèle en A .

EXERCICE N°2 : 6 points 40 '

Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $(E) : z^2 + \left(1+\sqrt{3}i\right)z - 2\left(1-\sqrt{3}i\right) = 0$.

1°) a) Vérifier que $\left(3 - i\sqrt{3}\right)^2 = 6 - 6\sqrt{3}i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

2°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On note A, B et E les points d'affixes respectives $z_A = 1 - \sqrt{3}i$, $z_B = (-2)$ et $z_E = \frac{-2\sqrt{3}}{3}i$.

a) Ecrire le nombre complexe z_A sous la forme exponentielle .

b) Vérifier que A et B sont deux points du cercle ζ de centre O et de rayon 2 .

c) Prouver que $\frac{z_E - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{3}$ et en déduire que les points A, B et E sont alignés .

d) Construire les points A, B et E dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

3°) La droite parallèle à l'axe des abscisses passant par E coupe la droite (OA) en un point D d'affixe z_D .

a) Montrer que la distance AD est égale à $\frac{2}{3}$.

b) En déduire la forme exponentielle de z_D .

4°) Montrer que l'aire du trapèze $OBED$ est égale à $\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

Tous droits réservés © TakiAcademy.com

EXERCICE N°3 : 6 points 30 '

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+1 & si \quad x<0 \\ \sqrt{x^2+1}-x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

1°) a) Montrer que pour tout $x<0$, $1-x^2\leq f(x)\leq 1+x^2$.

b) En déduire que f est continue en 0 .

2°) a) Prouver que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=1$, en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

3°) Montrer que f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

4°) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x^2$.

a) Dresser le tableau de variations de g .

b) En déduire que l'équation $f(x)=x^2$ admet une unique solution α dans $]0,\sqrt{3}[$

c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

EXERCICE N°4 : 4 points 25 '

La courbe (C_f) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur IR.

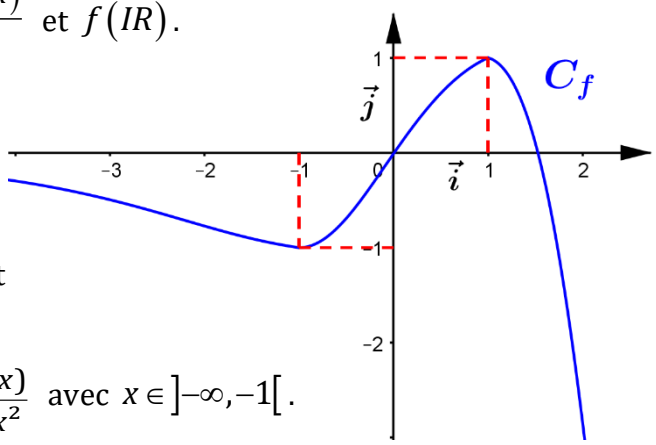
(C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote d'équation $y=0$ et au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

1°) a) Par une lecture graphique, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $f(IR)$.

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to0^+} x f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x f(x)}{1-x^2}$.

2°) a) Montrer que la fonction composée $f\circ f$ est continue sur IR.

b) En déduire que l'équation $(f\circ f)(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha\in]-1,1[$.



3°) On considère la fonction h définie par $h(x)=\frac{x f(x)}{1-x^2}$ avec $x\in]-\infty,-1[$.

a) Déterminer $f(]-\infty,-1[)$.

b) En déduire que pour tout $x\in]-\infty,-1[$, on a : $\frac{-x}{1-x^2}\leq h(x)\leq 0$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$.

: 23390248 - 29862815
Tous droits réservés © TakiAcademy.com